ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ LOAN

ĐỊNH LÝ FORELLI ĐỐI VỚI ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH VÀO KHÔNG GIAN PHỨC

Ngành: Toán giải tích
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai

THÁI NGUYÊN - 2018

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái nguyên, tháng 9 năm 2018

Người viết luận văn

Phạm Thị Loan

LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của cô giáo **T.S Nguyễn Thị Tuyết Mai**. Nhân dịp này, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất đối với cô.

Em xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán Trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên cùng các thầy cô giáo đã tận tình giảng dạy chúng em suốt khóa học.

Em chân thành cảm ơn gia đình, đồng nghiệp và bạn bè đã động viên khích lệ trong suốt quá trình hoàn thành, bảo vệ luận văn này.

Thái Nguyên, tháng 9 năm 2018

Tác giả luận văn

Phạm Thị Loan

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Ánh xạ chỉnh hình vào các không gian phức từ lâu đã trở thành những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Hướng nghiên cứu này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Một số tác giả nổi tiếng như Đỗ Đức Thái, Nguyễn Thanh Vân, J. Sicial, Shiffman, T.Terada,... đã chứng minh được một số kết quả đẹp đẽ và sâu sắc về ánh xạ chỉnh hình vào các không gian phức. Những công trình đó đã thúc đẩy hướng nghiên cứu này phát triển mạnh mẽ. Ngày nay, nhiều nhà toán học trên thế giới vẫn quan tâm đến vấn đề trên bằng những cách tiếp cận khác nhau nhằm giải quyết được những bài toán cụ thể đặt ra trong lĩnh vực đó.

Như chúng ta đã biết định lý cổ điển của Hartogs khẳng định rằng nếu một hàm giá trị phức $f(z_1, \dots, z_n)$ được xác định bởi $z = (z_1, \dots, z_n) \in U \subset \mathbb{C}^n, (n \geq 2)$ là hàm chỉnh hình tách, tức là chỉnh hình theo từng biến khi các biến khác nhau là cố định thì f là chỉnh hình thực sự. Đây là một trong số những kết quả quan trọng của giải tích phức nhiều biến.

Năm 1978, Forelli đã chứng minh được kết quả đáng chú ý sau đây:

Nếu f là một hàm được xác định trong hình cầu đơn vị $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$, chỉnh hình trên giao của $\mathbb{B}^n$ với mỗi đường thẳng phức l đi qua điểm gốc và nếu f khả vi lớp C^∞ trong lân cận của điểm gốc thì f chỉnh hình trong $\mathbb{B}^n$.

Năm 2004 các tác giả Đỗ Đức Thái, Nguyễn Tài Thu, Phạm Ngọc Mai [14] đã nghiên cứu và đưa ra một số kết quả mở rộng của định lý Forelli đối với ánh xạ chỉnh hình vào các không gian phức.

Mục đích của luận văn này là nghiên cứu trình bày lại một cách chi tiết, rõ ràng các kết quả nghiên cứu của Đỗ Đức Thái, Nguyễn Tài Thu, Phạm Ngọc Mai về định lý Forelli đối với ánh xạ chỉnh hình vào các không gian phức.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày trong 2 chương.

Trong chương 1 chúng tôi trình bày các kiến thức chuẩn bị để phục vụ cho việc trình bày nội dung chính của luận văn ở chương 2 bao gồm một số kiến thức cơ bản của giải tích phức như: ánh xạ chỉnh hình, không gian phức, không gian phức lồi chỉnh hình, không gian phức kiểu Hartogs, không gian K$\ddot{a}$hler phức, không gian Stein.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày các định lý là mở rộng của định lý Forelli bao gồm.

- Không gian phức có tính chất Forelli.
- Định lý Forelli đối với không gian phức kiểu Hartogs.
- Định lý Forelli đối với đa tạp K$\ddot{a}$hler phức compact lồi chỉnh hình.
- Định lý Forelli đối với đa tạp phức lồi chỉnh hình.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Hàm đa điều hòa dưới và tập đa cực

1.1.1 Hàm đa điều hòa dưới

Định nghĩa 1.1.1 [5]

Giả sử D là một tập con mở trong $\mathbb{R}^n$. Hàm $u: D \to [-\infty, \infty), u \neq -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của D được *gọi là điều hòa dưới* trong D nếu u thỏa mãn hai điều kiện sau:

i. Hàm u là *nửa liên tục* trên trong D, tức là tập $\{z \in D: u(z) < s\}$ là mở với mỗi số thực s.

ii. Với mỗi tập con mở compact tương đối G của D, với mỗi hàm $h: G \to \mathbb{R}$ điều hòa trong G và liên tục trên $\overline{G}$: nếu $u \leq h$ trên ∂G thì $u \leq h$ trên G.

Định nghĩa 1.1.2 [5]

Giả sử Ω là một tập con mở trong $\mathbb{C}^n$. Hàm $\varphi: \Omega \to [-\infty, \infty)$ được gọi là *đa điều hòa dưới* trong Ω nếu:

i. φ là nửa liên tục trên trong Ω và $\varphi \neq -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của Ω.

ii. Với mỗi điểm $z^0 \in \Omega$ và mỗi đường thẳng phức $l(\xi) = z^0 + w.\xi$ đi qua z_0(ở đó $\Omega \in \mathbb{C}^n, \xi \in \mathbb{C}$), hạn chế φ lên đường thẳng này, tức là hàm $\varphi \circ l(\xi)$ hoặc là điều hòa dưới $\equiv -\infty$ trên mọi thành phần liên thông của tập mở $\{\xi \in \mathbb{C}: l(\xi) \in \Omega\}$.

Ta có tiêu chuẩn đa điều hòa dưới như sau:

Hàm $\varphi: \Omega \to [-\infty, \infty)$ nửa liên tục trên trong miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là đa điều hòa dưới trong Ω khi và chỉ khi :

với mỗi $z_0 \in \Omega$ và mỗi $w \in \mathbb{C}^n$, tồn tại $r_0 = r_0(z^0, w)$ sao cho

$\varphi(z^0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(z^0 + wre^{it}\right)dt$, với mọi $r < r_0$.

Định nghĩa 1.1.3

Giả sử X là không gian phức. Một hàm đa điều hòa dưới trên X là hàm $\varphi: X \to [-\infty, \infty)$ thỏa mãn : Với mỗi $x \in X$ tồn tại lân cận U của x và một ánh xạ song chỉnh hình $h: U \to V$, với V là một không gian con phức đóng của một miền G nào trong $\mathbb{C}^n$, tồn tại một hàm đa điều hòa dưới $\tilde{\varphi}: G \to [-\infty, \infty)$ sao cho $\varphi|_U = \tilde{\varphi} \circ h$.

Để ý rằng định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn bản đồ địa phương.

Formaess và Narasimha đã chứng minh rằng: Hàm nửa liên tục trên $\varphi: X \to [-\infty, \infty)$ là đa điều hòa dưới khi và chỉ khi $\varphi \circ f$ là điều hòa dưới hoặc $\varphi \circ f \equiv -\infty$ với mọi ánh xạ chỉnh hình $f: \Delta \to X$, trong đó Δ là đĩa đơn vị mở trong $\mathbb{C}$.

Ký hiệu *PSH(X)* là tập tất cả các hàm đa điều hòa dưới trên không gian phức *X*.

1.2.2. Tập đa cực

Định nghĩa 1.2.2

Giả sử X là một không gian phức. Một tập $E \subset X$ được gọi là *đa cực* (đa cực đầy) nếu với mỗi điểm $a \in E$ tồn tại một lân cận V của a và một hàm đa điều hòa dưới $\varphi: V \to [-\infty, \infty)$ sao cho $E \cap V \subset \{z \in V: \varphi(z) = -\infty\}$ ($E \cap V = \{z \in V: \varphi(z) = -\infty\}$).

Định lý 1.2.2 (Định lý Josefson)[5]

Nếu $E \subset \mathbb{C}^n$ là tập đa cực thì tồn tại một hàm $u \in PSH(\mathbb{C}^n)$ sao cho $E \subset \{z \in \mathbb{C}^n: u(z) = -\infty\}$.

Định lý này được mở rộng một cách tự nhiên lên các không gian Stein.

Định lý 1.2.3 [5]

Hợp đếm được của các tập đa cực là tập đa cực.

1.2 Ánh xạ chỉnh hình

Định nghĩa 1.2.1

Giả sử X là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$ và $f: X \to \mathbb{C}$ là một hàm số.

Hàm *f được gọi là khả vi phức tại* $x_0 \in X$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $\lambda: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)|}{|h|} = 0,$$

trong đó $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ và $|h| = (\sum_{i=1}^n |h_i|^2)^{\frac{1}{2}})$.

Hàm *f* được gọi *là chỉnh hình* tại $x_0 \in X$ nếu f khả vi phức trong một lân cận nào đó của x_0 .

Hàm f được gọi là *chỉnh hình trên X* nếu *f* chỉnh hình tại mọi điểm thuộc X.

Định nghĩa 1.2.2

Cho X là một tập mở trong $\mathbb{C}^n$

i. Một ánh xạ $f: X \to \mathbb{C}^m$ có thể viết dưới dạng $f = (f_1, \dots, f_m)$, trong đó $f_i = \pi_i \circ f: X \to \mathbb{C},\ i = 1, \dots, m$ là các hàm tọa độ. Khi đó f được gọi là *chỉnh hình trên X* nếu hàm f_i chỉnh hình trên *X* với mọi $i = 1, \dots, m$.

ii. Ánh xạ $f: X \to f(X) \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là *song chỉnh hình* nếu *f* là song ánh, chỉnh hình và f^{-1} cũng là ánh xạ chỉnh hình.

1.3 Không gian phức

Định nghĩa 1.3.1

Giả sử Z là đa tạp phức. Một *không gian phức đóng* X là một tập con đóng của Z mà về mặt địa phương được xác định bởi hữu hạn các phương trình giải tích. Tức là, với $x_0 \in X$ tồn tại một lân cận mở V của *x* trong Z và hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ trên V sao cho

$$X \cap V = \{x \in V | \varphi_i(x) = 0, i = 1,2, \dots, m\}.$$

Định nghĩa 1.3.2

Giả sử *X* là một không gian phức trong đa tạp phức *Z*.

- Một điểm $a \in X$ được gọi là *điểm chính quy* của *X* nếu a có một lân cận *U* trong Z sao cho $U \cap X$ là đa tạp phức. Tập các điểm chính quy của *X* được kí hiệu là $\mathrm{X_{reg}}$.

- Một điểm $a \in X$ được gọi là *điểm kỳ dị* của X nếu nó không là điểm chính quy. Tập các điểm kỳ dị của *X* được kí hiệu là X_{sin}.

Định lý 1.3.1

Trong không gian phức X, tập các điểm chính quy X_{reg} là một đa tạp phức mở và tập các điểm kì dị X_{sin} là một không gian phức với $IntX_{sin} = \emptyset$.

Định nghĩa 1.3.3

Giả sử X là một không gian con trong đa tạp phức Z.

Hàm $f: X \to \mathbb{C}$ được gọi là *chỉnh hình* trên *X* nếu với mỗi điểm $x \in X$ tồn tại một lân cận $U(x) \subset Z$ và một hàm chỉnh hình $\hat{f}$ trên U sao cho $\hat{f}|_{U\cap X} = f|_{U\cap X}$.

Định nghĩa 1.3.4

Giả sử $f: X \to Y$ là ánh xạ giữa hai không gian phức X và Y. f được gọi là *chỉnh hình* nếu với mỗi hàm chỉnh hình g trên một tập con mở V của Y, hàm hợp $g \circ f$ là hàm chỉnh hình trên $f^{-1}(V)$.

Kí hiệu *Hol(X,Y)* là tập các ánh xạ chỉnh hình từ X vào Y được trang bị tô pô compact mở.

Giả sử $\{f_n: X \to Y\}$ là dãy các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức X, Y. Nếu $\{f_n\}$ hội tụ đều tới f trong *Hol(X,Y)* thì f là ánh xạ chỉnh hình.

Định lý 1.3.2 (Định lý Hironaka về giải kỳ dị)

Giả sử X là không gian phức. Khi đó, với mọi $x \in X$ tồn tại lân cận mở U chứa x, tồn tại đa tạp giải tích M và ánh xạ chỉnh hình $\pi: M \to U$ lên U sao cho:

i. *π là ánh xạ riêng.*